

Cours 10: Equations linéaires du deuxième ordre

La forme la plus commune est la forme
"auto-adjointe"

$$(NHS) \quad (p(t)x')' + q(t)x = h(t),$$

avec sa version homogène

$$(HS) \quad (p(t)x')' + q(t)x = 0,$$

où

$$(10.1) \quad \begin{cases} p, q, h \in C^0(a, b, \mathbb{R}), -\infty \leq a < b \leq \infty, \\ p(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b). \end{cases}$$

On remarque que, si $p \in C^1(a, b, \mathbb{R})$ alors

$$\text{si } px'y \Big|_a^b = py'x \Big|_a^b = 0$$

alors :

$$\int (px')'y + qxy$$

$$= - \int px'y' + qxy$$

$$= \int (py')'x + qyx$$

$(px')' = p'x' + px''$ et (NHS) devient

$$px'' + p'x' + qx = h$$

$$x'' + \frac{p'}{p}x' + \frac{q}{p}x = \frac{h}{p}.$$

Ainsi, si $p \in C^1$ (NHS) peut être mise sous la forme canonique

$$(10.2) \quad x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t).$$

Nous verrons en exercice que (9.2) peut toujours s'écrire sous la forme (NHS).

Néanmoins, $p \in C^1$ n'est pas nécessaire pour

résoudre (NHS). En effet, (NHS) se réécrit comme un système d'ordre 1 en posant $x_1 = x$, $x_2 = p x'$:

$$\begin{cases} x_1' = \frac{1}{p(t)} x_2 \\ x_2' = -q(t) x_1 + h(t) \end{cases}$$

soit

$$(10.3) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p(t)} \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

Les conditions initiales du problème de Cauchy associé à (9.3) sont de la forme

$$(10.4) \quad x_1(t_0) = x(t_0) = z_1, \quad x_2(t_0) = p(t_0)x'(t_0) = z_2$$

avec $t_0 \in (a, b)$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Au vu de cette structure, on a la définition naturelle suivante.

Définition 10.1: Une fonction $\phi(t)$ est une solution de (NHS) sur (a, b) si $\phi(t)$ et $(p\phi')(t)$ sont dérivable sur (a, b) et satisfont (NHS) sur (a, b) .
 $\phi(t)$ est une solution du problème de Cauchy (NHS) - (10.4) si ϕ est solution de (NHS) et satisfait les conditions initiales (10.4).

Remarque 10.1: Pour que ϕ soit solution de (NHS), il n'est pas requis que ϕ' soit dérivable sur (a, b) .
(ex: $\phi'(t) = |t|^{\frac{1}{2}}$ et $p(t) = |t|^{\frac{3}{2}}$ sur $(-1, 1)$)

Lemme 10.1: Sous les hypothèses (10.1), le problème de Cauchy (NHS)-(10.4) possède une unique solution qui existe sur (a, b) .

Preuve: Il suffit d'appliquer le Théorème 5.1 au problème de Cauchy (10.3)-(10.4). #

Deux conséquences importantes du lemme 10.1 pour les solutions de (HS) sont les suivantes.

Lemme 10.2: Sous les hypothèses (10.1), si ϕ est une solution non-triviale de (HS) alors $\phi(t)$ et $p(t)\phi'(t)$ ne peuvent s'annuler simulta-

nément sur (a, b) . En particulier, si $p \equiv 1$, une solution non-triviale de (HS) ne peut avoir un zéro double dans (a, b) .

Lemme 10.3 : Sous les hypothèses (10.1), soit ϕ une solution non-triviale de (NHS). Alors les zéros de ϕ ne peuvent avoir de point d'accumulation intérieur à (a, b) .

Remarque 10.2 : Les conclusions des lemmes 10.2 et 10.3 restent vraies si l'on remplace (HS) par l'équation

$$(10.5) \quad (p(t)x')' + g(t, x) = 0,$$

où $g \in C^0((a,b) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est localement lipschitzienne en x et satisfait $g(t,0) \equiv 0$.

Preuve du lemme 10.3: Supposons par contraposition qu'il existe $t^* \in (a,b)$ et une suite $\{t_n\} \subset (a,b)$ de zéros de ϕ t.q. $t_n \rightarrow t^*$. Comme ϕ est continue, on conclut immédiatement que $\phi(t^*) = 0$.

S.p.d.g. nous pouvons supposer que $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$. Par le théorème de Rolle, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\tau_n \in (t_n, t_{n+1})$ t.q. $\phi'(\tau_n) = 0$. Comme $\tau_n \rightarrow t^*$ et $p\phi'$ est continue, on conclut que $(p\phi')(t^*) = 0$. Ainsi, ϕ est l'unique solution

de (HS) qui satisfait les CI $\phi(t^*) = (p\phi')(t^*) = 0$,
à savoir $\phi \equiv 0$. $\#$

La preuve du lemme 0.2 est donnée par la dernière phrase de la preuve du lemme 0.3 ci-dessus.

Lemme 0.4 : Les solutions de (HS) forment un espace vectoriel de dimension 2.

Preuve : Conséquence immédiate de la formulation équivalente (0.3) et du théorème 5.2.

Nous introduisons maintenant un outil central de la théorie de Sturm-Liouville.

Transformation de Prüfer

Considérons à nouveau l'équation

$$(HS) \quad (p(t)x')' + q(t)x = 0,$$

maintenant avec l'hypothèse

$$(10.6) \quad \begin{cases} p, q \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \quad -\infty < a < b \leq \infty, \\ p(t) > 0 \quad \forall t \in (a, b). \end{cases}$$

Etant donné une solution non-triviale $x(t)$ de (HS),
définissons $r, \theta \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ par

$$(10.7) \quad r^2(t) = x^2(t) + (px')^2(t), \quad r(t) > 0$$

et

$$(10.8) \quad \tan \theta(t) = \frac{x(t)}{(px')(t)}, \quad \text{avec } \theta(a) \in [0, \pi).$$

Clairement, $r(t)$ et $\theta(t)$ sont déterminés de façon unique par (10.7)–(10.8). Ces nouvelles variables sont appelées rayon de Prüfer et angle de Prüfer, respectivement. Nous montrerons en exercice que $r, \theta \in C'([a, b], \mathbb{R})$ et satisfont le système

$$(10.9) \quad r' = \left(\frac{1}{p(t)} - q(t) \right) r \sin \theta \cos \theta,$$

$$(10.10) \quad \theta' = \frac{1}{p(t)} \cos^2 \theta + q(t) \sin^2 \theta.$$

Par définition de θ , on a que

$$\forall \tilde{t} \in [a, b), \quad x(\tilde{t}) = 0 \iff \theta(\tilde{t}) = 0 \pmod{\pi}.$$

Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 10.1 : Sous l'hypothèse (10.6), soit $x(t)$ une solution non-triviale de (HS) et soit $r, \theta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ définis par (10.7)-(10.8).

Supposons qu'il existe $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < b$ tels que

$$x(t_k) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) \neq 0 \quad \text{si} \quad t \neq t_k, \quad k=1, \dots, n.$$

Alors, pour $k=1, \dots, n$, on a

$$\vartheta(t_k) = k\tilde{\alpha}, \quad \vartheta(t) > k\tilde{\alpha} \quad \forall t > t_k.$$

Preuve: Par (10.8), $\vartheta(t) = 0 \pmod{\tilde{\alpha}}$ ssi $\exists k \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $t = t_k$. De plus, par (10.10), $\vartheta'(t_k) = 1/p(t_k) > 0$. Comme ϑ' est continue sur $[a, b)$, ϑ est strictement croissante dans un voisinage à droite de t_k . Puisque $\vartheta(t) \not\equiv 0 \pmod{\tilde{\alpha}}$ pour tout $t \in (t_k, t_{k+1})$ et $\vartheta'(t_{k+1}) > 0$, la continuité de ϑ entraîne

$$\vartheta(t_{k+1}) = \vartheta(t_k) + \tilde{\alpha}, \quad \vartheta(t) > \vartheta(t_k) \quad \forall t > t_k.$$

La condition $\vartheta(a) \in [0, \tilde{\alpha})$ dans (10.8) implique finalement que $\vartheta(t_k) = k\tilde{\alpha}$, $k = 1, \dots, n$. $\#$